Современная наука и инновации.
2023. №2 (42). С. 20-32
Modern Science and Innovations.
2023; 2(42):20-32

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ / TECHNICAL SCIENCE

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ / INFORMATICS, COMPUTER ENGINEERING AND MANAGEMENT

Научная статья / Original article

УДК 517.972.5
DOI: 10.37493/2307-910X.2023.2.2

Александр Борисович Чебоксаров
[Alexander B. Cheboksarov] [1],
Наталья Юрьевна Ботвинёва
[Natalia Yu. Botvineva] [1],
Виктор Александрович Чебоксаров
[Victor A. Cheboksarov] [2],
Екатерина Владимировна
[Ekaterina V. Polovinko][2]

Эталонное моделирование как метод решения нелинейных задач

Reference modeling as a method for solving nonlinear problems

[1]Ставропольский государственный педагогический институт (филиал), г. Ессентуки, Россия / Stavropol State Pedagogical Institute (branch), Essentuki, Russia, cheboksarov1956@mail.ru
[2]Северо-Кавказский Федеральный университет, Пятигорский институт (филиал), г. Пятигорск, Россия / North-Caucasus Federal University, Pyatigorsk Institute (branch), Pyatigorsk, Russia, cheboksarov1956@mail.ru

Аннотация. *В настоящей работе исследовано использование метода эталонного моделирования, предназначенного для расчета, анализа и математического моделирования нелинейных физических явлений и технологических процессов.Сформулированы преимущества данного метода и возможность его применения во всём диапазоне основных параметров нелинейной задачи, однотипность расчётной схемы для всех типов задач. Предложенный метод использован для создания моделей конвективной диффузии в неоднородной среде, рассеяния тепловых электронов в поле с центральной симметрией, поведения электропроводности в зависимости от температуры и диэлектрической проницаемости широкозонных полупроводников. Рассмотренная в качестве тестовой задача о расчёте прозрачности потенциального барьера, на который налетает частица, дала неплохой результат (ошибка в пределах 0,8-1,2%). В настоящей работе продемонстрированы основные особенности использования метода эталонного моделирования для решения для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Полученные результаты анализа и моделирования позволяют с вполне уверенно оценивать надёжность общих идей метода эталонного моделирования, его расчётной схемы, а также сходимости его разложений, критериев сходства исследуемой системы и выбранной модели. Предложенный в работе метод, с учётом его апробации в различных условиях может служить основой для применения при исследовании нелинейных проблем различной природы, нахождению приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений*

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные дифференциальныеуравнения, метод эталонного моделирования

Для цитирования: Чебоксаров А. Б., Ботвинева Н. Ю., Чебоксаров В. А., Половинко Е. В. Эталонное моделирование как метод решения нелинейных задач // *Современная наука и инновации. 2023. №2 (42). С. 20-32. https://doi.org/10.37493/2307-910X.2023.2.2*

Abstract. *In this paper, the method of reference modeling is considered, designed for calculation, analysis and mathematical modeling of nonlinear physical phenomena and technological processes. The advantages of this method, the possibility of its application in the entire range of basic parameters of a nonlinear problem, the uniformity of the design scheme for all types of problems are formulated. The proposed method is used to create models of convective diffusion in an inhomogeneous medium, scattering of thermal electrons in a field with central* *symmetry, and the behavior of electrical conductivity depending on temperature and dielectric permittivity of wide-band semiconductors. The problem of calculating the transparency of a potential barrier that a particle hits, considered as a test, gave a good result (an error in the range of 0.8-1.2%). In this paper, the main features of using the reference modeling method for solving nonlinear differential equations are demonstrated. The obtained results of analysis and modeling allow us to confidently assess the reliability of the general ideas of the reference modeling method, its design scheme, as well as the convergence of its decompositions, the similarity criteria of the system under study and the selected model. The method proposed in this paper, taking into account its approbation in various conditions, can serve as a basis for application in the study of nonlinear problems of various nature, finding approximate solutions to nonlinear differential equations*

Key words: mathematical modeling, nonlinear differential equations, the method of reference modeling

For citation: Cheboksarov A. B., Botvineva N. Y., Cheboksarov V.A., Polovinko E. V. Reference modeling as a method for solving nonlinear problems. *Modern Science and Innovations. 2023;2(42):20-32. https://doi.org/10.37493/2307-910X.2023.2.2*

Введение. Уже четыре сотни лет учёный мир применяет математическое моделирование в качестве метода познания (хотя сам термин, и методология возникли в 20 веке). В значительной части научных исследований натурный эксперимент невозможен в принципе: либо запрещён по различным условиям применимости (угроза жизни и здоровью человека, вопросы этики, экологические проявления), либо технически неосуществим (например, в космологии), либо очень дорог. Достаточно долго моделирование строилось на основе линейных закономерностей [1, 2] как-то закон упругости $F_{упр} = -kx$, если *k*постоянна, закон Ома для постоянного тока*U=RI (*при условии, что*R*-const*)*. Однако, во многих физических явлениях и технологических процессах приходится иметь дело с нелинейными моделями. К примеру, законы классической гравитации $F_{пр} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, электростатики $F_{кул} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$. Они являются нелинейными, даже при неизменных коэффициентах пропорциональности. Наиболее часто мы видим нелинейность в изменении вида взаимодействия внутри самого объекта, если изменяется состояние последнего. К примеру, при моделировании колебательного процесса материальной точки на пружине, жёсткость которой изменяется в зависимости от изменения положения тела относительно положения равновесия, то есть $k = k(x)$, при $k>0$. [3, 4, 5]. Моделирование процесса приведёт к уравнению $mx_{tt} = - k(x)x$. Кстати, данное уравнение одно из тех немногих уравнений с частными производными, которое имеет точное решение:

$$t = \pm\int_0^x dx\left(\sqrt{C - 2\int_0^x k'(x')x'dx'}\right)^{-1} + C_1. \qquad (1)$$

В нашем примере, решение (1) записано в неявном виде, а постоянные интегрирования C, C_1 легко найти, используя исходные условия (то есть решив задачу Коши).

Природа нелинейности может быть разной, но моделирование таких процессов приведёт к одному – дифференциальным уравнениям с частными производными. К сожалению, на текущий момент, общих методов их решения не разработано.Поэтому развитие математического моделирования в данном направлении является одной из важнейших научных задач.

Материалы и методы. Анализ существующих аналитических методов решения дифференциальных уравнений с частными производными, таких как, например, метода автомодельных переменных, специальных преобразований, вариационного метода, метода ВКБ [1; 2; 5; 6 и др.] и др, показывает, что в настоящее время универсальных методов не существует. Действительно, колоссальное множество разнообразных нелинейных моделей, а также различие в математических свойствах уравнений, построенных для их описания, затрудняют создать универсальный метод. Известные всем вычислительные методы решения, такие как ньютоновский метод, как стандартный, так и модифицированный, метод последовательных приближений, метод Рунге–Кутта. Метод сеток и огромное количество других численных методов [6; 7; 8; 9; 10], дают решения таких уравнений, но не гарантируют нахождения особых, специфических характеристик поведения нелинейной системы. К тому же, прежде чем применять численное решение, требуется оценка расположения результата исследования.

Вышесказанное позволяет сделать вывод о необходимости нахождения нового метода приближённого решения дифференциальных уравнений с частными производными, который имеет широкую область применения, чёткие границы использования, универсальный алгоритм и др.

Мы предлагаем следующее: сложную нелинейную систему исследуем с помощью более простой, но подобной по поведению, аналитическое решение которой существует, или может быть найдено. Достоинства предлагаемого подхода:

1) широкий диапазон применимости, ко всем необходимым для исследования величинам;

2) доступность к пониманию физического смысланайденное математическое описаниерешения;

3) решения существуют во всём диапазоне значений;

4) все виды задач решаются по единому алгоритму;

5) полученные в процессе решения разложения в степенные ряды обладают быстрой сходимостью.

Предложенная нами методика успешно использовалась для моделирования различных нелинейных процессов [11; 12; 13].

Разработанный метод мы назвали методом эталонного моделирования. Как уже сказано, он предназначен для нахождения приближённого решения большого круга нелинейных задач.

Суть метода в том, что мы исследуем характер эволюции одной системы, выражаемой дифференциальным уравнением с частными производными, точного решения которое не имеет, при помощи другой, выражаемой дифференциальным уравнением с частными производными, точное решение у которого существует.Первую, не имеющую решения, систему, будем называть исследуемой или разыскиваемой, а вторую – эталонной.

Чтобы описать алгоритм работы предлагаемого нами метода, рассмотрим нижеприведённую задачу.

Допустим, что желаемое поведение разыскиваемой нелинейной системы выражается в виде такого дифференциального уравнения:

$$(\hat{l} + \frac{1}{\alpha^2}\hat{m})u(x,t) = 0, \tag{2}$$

Для краткости записи, обозначили в этом дифференциальном уравнении символом $\hat{l}$ дифференциальный оператор, символом $\hat{m}$обозначили нелинейный оператор, который описывает характер эволюции системы, символом α мы назвали параметр малости, а величина, описывающая состояние системы, записана функцией u (x, t).

В данном примере, дифференциальные операторы $\hat{l}$ и $\hat{m}$представлены таким образом, что это нелинейное дифференциальное уравнение не имеет решения.

Чтобы решить нашу задачу, то есть описать процесса, протекающие в системе, необходимо найти решение уравнения (2), а для этого мы возьмём другую, также нелинейную систему, которую можно описать с помощью уравнения

$$\left[\hat{L} + \frac{1}{\alpha^2}\hat{M}\right]U(s,t) = 0 \tag{3}$$

В этом дифференциальном уравнении эталонной модели, дифференциальный оператор $\hat{L}$ формально соответствует оператору, $\hat{l}$, а оператор $\hat{M}$, описывающий характер эволюции эталонной модели, фундаментально подобен нелинейному оператору $\hat{m}$; функцию, описывающая характеристики модельного состояния запишем символом $U(s,t)$, переменную модели запишем символом $S(x,t)$.

Нелинейный оператор $\hat{M}$, описывающий характер эволюции эталонной модели, имеет такой вид, что уравнение (3) допускает точное решение. Не сложно понять, что это означает: точное значение функции $U(S(x,t))$ нам известно (или может быть найдено).

Следовательно, цель, стоящая перед нами, заключается в нахождении того, как, зная решение уравнения для модели-эталона найти приближённое решение функции состояния исследуемой системы.

Сначала определим критерии для выбора системы (32.1.2) вкачествеэталонной модели искомой системы (2). Основное требование: качественное сходство операторов, описывающих характер эволюции эталонной модели $\hat{M}$ и исследуемой системы $\hat{m}$. Данное требование не достигается автоматически. К данному времени, к сожалению, порядок выбора оптимальной эталонной модели $\hat{M}$ для нашей системы $\hat{m}$ ещё не разработаны. Но мы можем чётко сформулировать, какие условия схожести необходимы для успешного решения нашей задачи [14; 15; 16].

1. Операторы $\hat{m}$ и $\hat{M}$, действующие на одинаковые функции $f(x,t)$, $f[s(x,t)]$ дают новые функции

$$\hat{M}f\left[s(x,t)\right]=P\left[s(x,t)\right]; \tag{4}$$

$$\hat{m}f(x,t)=p(x,t), \tag{5}$$

которые имеютравное количество нулей.

2. Эти нули должны иметь один и тот же порядок кратности, то есть, разложение функций $p(x,t)$ и $P(x,t)$ возле нуля $x=x_0$ и, значит, $s = s_0$, должно иметь следующий вид:

$$p(x,t)=0+p'(x_0,t)(x-x_0)+p''(x_0,t)(x-x_0)^2+..., \tag{6}$$

$$P\left[s(x,t)\right]=0+P'\left[S_0(x,t)\right](s-s_0)+P''\left[S_0(x,t)\right](s-s_0)^2+.... \tag{7}$$

В этом случае, для ненулевых значений производной $p'(x_0,t)\neq 0$, значение координаты $x=x_0$ - нуль первого порядка, для нулевых значений производной $p'(x_0,t)=0$, при которых вторая производная имеет ненулевое значение $p''(x_0,t)\neq 0$ координата $x=x_0$ - нуль второго порядка и т.д. Подобныеобозначения выберем и для модельной функции $P\left[S_0(x,t)\right]$.

3. Вид оператор, описывающего процесс развития системы $\hat{M}$ должен быть выбран так, чтобы выполнялось обязательное условие: в результате его применения к некоторой функции мы получаем новую функцию, у которой тот же набор особых точек, что был бы при действии оператора $\hat{m}$ на эту же функцию.

В качестве примера рассмотрим случай, когда действие оператора $\hat{m}$ на какую-то функцию $u(r,t)$ состоит в операции умножению её наследующую функцию:

$$\begin{cases}\omega(r)=-\dfrac{const}{r}f(r),\\ f(r)=1+a_1r+a_2r^2+...+a_nr^n+...;\, n\to 0,\\ f(r)\approx \dfrac{1}{r^{\alpha}},\alpha>0,r\to\infty\end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, если следовать условиям схожести эталона и искомой функции, то эталоном должен быть оператор $\hat{M}$, действие которого заключается в умножении$U(s,t)$ на подобную (8) функцию

$$W(s) = -\frac{const}{s}. \tag{9}$$

Допустим, что мы выполнили условия схожести и нашли операторы $\hat{m}$ и $\hat{M}$. Теперь нам предстоит найти приближённое решение искомой функции $u(x,t)$ в следующем виде

$$u(x,t) = T(x,t) \cdot U\left[S(x,t)\right]. \tag{10}$$

Взаимосвязь между эталоном и искомой системой прослеживается и в зависимости $S = S(x,t)$. Чтобы найти вид функции $T(x,t)$ (мы считаем, что $U\left[S(x,t)\right]$ известна) воспользуемся, для примера, определённым дифференциальным уравнением с частными производными. Допустим, известным уравнениемSin-Гордона [17]

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \tag{11}$$

в котором обозначим нелинейный дифференциальный оператор и оператор эволюции

$$\hat{l} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \hat{m}u \equiv Sin[u(x,t)]. \tag{12}$$

На правую часть (10) воздействуем оператором (12), то есть найдём частные производные $\partial^2/\partial t^2$ и $\partial^2/\partial x^2$:

$$u_{tt} = T_{tt}U + 2T_tU_sS_t + TU_{ss}S_t^2 + TU_sS_{tt}; \tag{13}$$

$$u_{xx} = T_{xx}U + 2T_xU_sS_x + TU_{ss}S_x^2 + TU_sS_{xx}. \tag{14}$$

Разложим$Sin(TU)$ в степенной ряд

$$\sin(TU) = TU - \frac{T^3U^3}{3!} + \frac{T^sU^s}{5!} - .... \tag{15}$$

И подставимуравнения (13)– (15) в уравнение (11), оставив в разложении (15) только первоезначение. Мы получим следующее:

$$T_{tt}U + 2T_tU_sS_t + TU_{ss}S_t^2 + TU_sS_{tt} + TU = +T_{xx}U + 2T_xU_sS_x + TU_{ss}S_{xx}.$$

Разделим обе части этого уравнения на TU и выполним некоторые элементарные преобразования. Получим такоевыражение:

$$\frac{1}{T}(T_{tt} - T_{xx}) + \frac{2}{T}(T_t - T_x)U_sS_t + \frac{U_{ss}}{U}(S_t^2 - S_x^2) = -1. \tag{16}$$

Напомним, что вид производныхU, U_s, U_{ss} нам известен.

Выполнив анализ 2-го приближения в степенном ряде (15 2.1.13) и предельных случаев в (16 2.1.14), получимтакое выражение:

$$\alpha^2 \frac{T_{tt}}{T} - (S_t)^2 TU + TU = 0, \tag{17}$$

$$2\frac{T_t}{T} + \frac{S_{tt}}{S_t} = 0, \tag{18}$$

$$\alpha^2 \frac{T_{xx}}{T} - (S_x)^2 TU + TU = 0, \tag{19}$$

$$2\frac{T_x}{T} + \frac{S_{xx}}{S_x} = 0. \tag{20}$$

Выполнив интегрированиевыражений (18) и (20), получим

$$T(x,t) = \left[S_{xt}(x,t)\right]^{-1/2}. \tag{21}$$

То есть мы нашли, что приближённое решение нашей искомой системы, в соответствие с (21), будет выглядеть следующим образом

$$u(x,t) = \left[S_{xt}(x,t)\right]^{-1/2} \cdot U\left[S(x,t)\right]. \tag{22}$$

Данное уравнение есть одно из наиболее важных выражений в методе эталонного моделирования. Такое же уравнение получится, если указанный алгоритм применим к другим нелинейнымдифференциальным уравнениям.

Из (22) становится ясно, что основой алгоритма является нахождение функции $S(x,t)$, которую можно назвать фазовой функцией.

Из выражения (21) получим уравнение для производной второго порядка по направлению

$$T_{xx} = \frac{3}{4}(S_x)^{-5/2}(S_{xx})^2 - \frac{1}{2}(S_x)^{-3/2}S_{xxx} \tag{23}$$

которое подставим в (17). Найдём

$$(S_x)^2 F(s) - f(x) + \frac{\alpha^2}{2}\{s,x\} = 0, \tag{24}$$

где $F(s) = \hat{M}U,\ f(x) = \hat{m}u,$

$$\{s,x\} = \frac{S_{xxx}}{S_x} - \frac{3}{2}\left(\frac{S_{xx}}{S_x}\right)^2. \tag{25}$$

Таким же образом найдёмпроизводные по времени:

$$T_{tt} = \frac{3}{4}(S_t)^{-5/2}(S_{tt})^2 - \frac{1}{2}(S_t)^{-3/2}S_{ttt}, \tag{26}$$

$$(S_t)^2 F(s) - f(t) + \frac{\alpha^2}{2}\{s,t\} = 0, \tag{27}$$

$$\{s,t\} = \frac{S_{ttt}}{S_x} - \frac{3}{2}\left(\frac{S_{tt}}{S_t}\right)^2. \tag{28}$$

Выражения (24) и (27) в совокупности выполняют ту же роль, что и уравнение (12) для искомой системы. Заметим, что (24) и (27), по сути, являются нелинейнымиуравнениями третьего порядка.

Рассмотренный пример, и весь анализ был сделан для гиперболического уравнения (12). Для других типов уравнений математической физики - параболического и эллиптического типа, у которых имеются, соответственно, временные производные первого и нулевого порядка, ситуация с выражениями (26) – (28) будет проще. Кроме того, немного иначе будут выглядеть выражения (21) и (22).

Точное решение для (24) и (27) найти сложнее, чем для уравнения (12). Но здесь трудности легко компенсируются тем, что решение этихуравнений можно выполнить, используя метод последовательных приближений.

Уравнения (24) и (27) внешне похожи (аргументы только разные), поэтому продолжим решение любого из них, например, уравнения (24).

Функция $s(x)$ и параметр малости α в нём имеет чётную степень, поэтому стоит рассматривать разложение $S(x,t)$ только по чётным степеням α:

$$S(x,t) = S_0(x,t) + \alpha^2 S_2(x,t) + \alpha^4 S_4(x,t) + \dots. \tag{29}$$

Степенной ряд (29), в отличие от степенных рядов из ВКБ-приближения сходится со значительно большей скоростью.

Следует пояснить, что в методе ВКБ используются степенные ряды для аппроксимации функции предфактора. Эти ряды представляют собой разложение предфактора в степенную серию относительно малого параметра, который характеризует отношение масштабов в системе.

В общем случае, при использовании метода ВКБ, степенные ряды строятся на основе асимптотического разложения решения уравнения Шредингера вблизи точки поворота, где аргумент стационарной фазы обращается в нуль. Точка поворота является точкой, где квантовая система перестает вести себя квазиклассически, и приближение стационарной фазы перестает работать.

Степенные ряды в методе ВКБ строятся как формальные ряды, которые не всегда сходятся. Однако, даже если ряды не сходятся, их можно использовать для получения асимптотических решений уравнения Шредингера, которые соответствуют высоким энергетическим состояниям квантовой системы.

Использование степенных рядов в методе ВКБ позволяет получить приближенное решение уравнения Шредингера в виде асимптотической формулы, которая точна вблизи точки поворота. Это позволяет получить важную информацию о свойствах квантовой системы в области высоких энергий, где квантово-механическое описание необходимо.

Если в данном степенном ряде нашего метода отбросить все члены, следующие за членом нулевого порядка по параметру α, мы получим уравнение нулевого приближения:

$$(S_0)_x^2 F(S_0) - f(x) = 0. \tag{30}$$

Выполняя стандартную процедуру решения уравнения с разделяющимися переменными, найдём

$$\left(\frac{dS_0}{dx}\right) F^{1/2}(S_0) = f^{1/2}(x);$$

$$\int\limits_{S_{01}}^{S_0} F^{1/2}(S_0)dS_0 = \int\limits_{x_1}^{x} f^{1/2}(x)dx, \tag{31}$$

здесь верхние пределы имеют смысл текущих координат.

Чтобы найти нижние пределы, надо решить уравнения $f(x_1) = 0$ и $F(S_{01}) = 0$. Так как $S_0 = S_0(x)$, то очевидно

$$S_0(x_1) = S_{01}. \tag{32}$$

Выражение для $S_0(x)$ найдём, решая уравнение (31). Как показывает практика, интеграл левой части(31) можно вычислитьаналитически, при условии, что уравнение (3) имеет точный интеграл.

Определив $S_0(x)$ и вычислив (по тому же алгоритму) $S_0(t)$, мы можем построить $S_0(x,t)$, а из неё определить приближённое решение для уравнения (2), используя преобразование, связывающее эталонную модель с исследуемой функцией (22).

$$u(x,t) = A\left(S_{0_{xt}}\right)^{-1/2} U\left[S_0(x,t)\right]. \tag{33}$$

Таким образом, необходимый нам алгоритм определён. Он состоит из 4 этапов

1. Определения дифференциального оператора эволюции эталонной модели и проверка его формального соответствия оператору исследуемой системы

2. Построение выражений, выражающих фазовую функцию $S(x,t)$ в заданном нами приближении.

3. Решаем эти уравнения, для определения вида $S(x,t)$.

4. Находим нужную нам функцию $u(x,t)$ - приближённое решение дифференциального уравнения, описывающего поведение исследуемой системы.

Снова вернёмся к (24) и (27).

Возможность нулевого приближения ограничивается решением неравенства (для выражения (24)):

$$\frac{\alpha^2}{2}\left\{S_0,x\right\} << f(x). \tag{34}$$

Подобное неравенство можно записать и для уравнения (27).

Запишем (25) в виде

$$\{S_0,x\}=\frac{(S_0)_{xxx}}{(S_0)_x}-\frac{3}{2}\left[\frac{(S_0)_{xx}}{(S_0)_x}\right]^2, \tag{35}$$

Однако, из неравенства (34) мы не можем сделать вывод о природе критерия применимости метода эталонного моделирования.

Чтобы ответить на данный вопрос, выясним смысл выражения (25) в общем случае, абсолютно независимо от вида функций $f(x)$ и $F(S_0)$, для чего используем выражение (30), из которого получим

$$\frac{\partial S_0}{\partial x}=(F_0)^{-\frac{1}{2}}\cdot(f_0)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}(F_0)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\partial F_0}{\partial x}\cdot(f_0)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(F_0)^{-\frac{1}{2}}\cdot(f_0)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^3 S_0}{\partial x^3}=-\frac{3}{4}(F_0)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}\right)^2\cdot(f_0)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(F_0)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}\cdot f_0^{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2}(F_0)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\partial F_0}{\partial x}\cdot(f_0)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x}-\frac{1}{4}(F_0)^{\frac{1}{2}}\cdot(f_0)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}$$

Подставим найденные производные в (30) и, произведя несколько достаточно простыхпреобразований, получим следующее выражение

$$\{S_0,x\}=\frac{1}{2}\left[\frac{f_0''}{f_0}-\frac{5}{4}\left(\frac{f_0'}{f_0}\right)^2\right]-(S_0)_x^2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{F}_0}{F_0}-\frac{5}{4}\left(\frac{\ddot{F}_0}{F_0}\right)^2\right] \tag{36}$$

Повторим вышеприведённые действия для $\{S_0,t\}$

$$\left\{S_0,t\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{f_{0tt}}{f_0}-\frac{5}{4}\left(\frac{f_{0t}}{f_0}\right)^2\right]-(S_0)^2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{F}_0}{F_0}-\frac{5}{4}\left(\frac{\ddot{F}_0}{F_0}\right)^2\right] \tag{37}$$

Используя (36) приведём (34) к такому виду

$$\theta^2(\eta-\eta^*)<<1. \tag{38}$$

В этом выражении, мы ввели параметр, с помощью которого можно охарактеризовать интервалы (пространственный и временной) значительного изменения функций, $f(x), f(t), F(S_0), F(t)$, определяющих механизмы (то есть характеристические изменения параметров) развитияисследуемой системы и её модели. При этом величины

$$\eta=\frac{1}{4x^3}\left[\frac{5}{4}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2-x\frac{d^2x}{d\xi^2}\right]; x(\xi)=1-\frac{f(x)}{E}, \xi=\frac{x}{a_0}, \tag{39}$$

$$\eta^* = \frac{1}{4x^{*3}}\left[\frac{5}{4}\left(\frac{dx^*}{d\sigma}\right)^2 - x^*\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right]; x^*(\sigma) = 1 - \frac{F(S_0)}{E^*}, \sigma = \frac{S_0}{a_0}, \qquad (40)$$

В данных выражениях мы ввели обозначения: E – энергия, которой обладает вся исследуемая системы, E^*- энергия эталонной модели, a_0– величина, характеризующая размеры области существенного изменения функции $f(x)$, $f(t)$, $F(S_0)$, $F(t)$. В (38) θ - параметр, аналогичный параметру квазиклассичности в квантовой теории.

Квазиклассическая теория в квантовой механике - это метод приближения, который позволяет описывать квантовые системы с большими квантовыми числами в терминах классической механики.

Этот метод основан на предположении, что при достаточно больших значениях квантового числа (обычно это квантовое число действия) квантовые системы начинают проявлять свойства, которые напоминают поведение классических объектов. Таким образом, можно рассматривать квантовую систему как классический объект с некоторыми квантовыми поправками.

В квазиклассическом приближении, волновая функция квантовой системы может быть представлена в виде суммы двух компонент: основной компонент, которая описывает классическую траекторию системы, и корректирующего компонента, которая описывает квантовые поправки.

Основная компонента волновой функции представляет собой фазовый множитель, который зависит от классических координат и импульсов системы, а корректирующая компонента, которая зависит от квантовых чисел, включает в себя квантовые поправки.

Квазиклассическое приближение применяется, когда квантовые системы имеют большие значения квантовых чисел, и может быть использовано для решения различных задач, включая вычисление энергетических уровней атомов и молекул, расчет скоростей реакций в химических реакциях, и описания динамики квантовых систем на больших временных и пространственных масштабах.

Однако следует заметить, что приближение квазиклассики не всегда применимо, и может давать неточные результаты в случае, когда квантовые числа недостаточно большие.

Запись оценки области оптимального применения, предложенная в виде неравенства (38), даёт нам возможность подробно рассмотреть основные особенности предлагаемого нами метода эталонного**.**

В виде, подобномвыражению(38), можно записать неравенство, обобщённое по координатной и временной переменным:

$$\Theta^2(H - H^*) << 1. \qquad (41)$$

Величина Θ показывает, как быстро изменяется основная характеристика (например, энергия) системы в зависимости от быстроты изменениеёе положения иот времени. Величины H и H^* зависят не только от координат, как подобные им в (36) и (37), но и от времени.

Исследуя неравенство (41), мы можем рассмотреть, как минимум, три случая применимости метода эталонного моделирования**:**

$$1.\ \Theta << 1;\ (H - H^*) \le \Theta^{-1} \qquad (42)$$

Случай, когда скорость изменения основной характеристики (например, энергия) исследуемой системы многократнопревышаетбыстроту изменений функций, характеризующих процесс развития в исследуемой системе.

$$2.\ \Theta \sim 1,\ (H - H^*) << 1. \qquad (43)$$

Данное условие выполняетсяв случае, когда удалось найти эталонную модель, у которой функция $F(s)$, характеризующая условие её развития, максимально схожа по поведению с функцией, аналогичной ей в исследуемой системе. В этом случае наш метод будет аналогом теории возмущений.

Теория возмущений - это метод решения математических задач, основанный на приближении решения путем разложения функции или уравнения в ряд Тейлора и последующего приближенного вычисления этого ряда.

В физике теория возмущений используется для анализа систем, которые не могут быть точно решены аналитически, но для которых существуют малые параметры, которые можно использовать для приближенного решения.

Например, можно использовать теорию возмущений для решения уравнения Шредингера для атомов и молекул. В этом случае, гамильтониан, который описывает систему, может быть разложен в ряд Тейлора с использованием малого параметра - заряда ядра атома. Затем, можно приближенно вычислить значения энергий и волновых функций электронов в атоме.

Теория возмущений также широко используется в квантовой теории поля, где она позволяет вычислять взаимодействия между частицами, используя взаимодействие, которое уже известно или может быть легко вычислено.

$$3.\ \Theta >> 1,\ (H - H^*) \sim \Theta^{-3} << 1 \qquad (44)$$

При условии, бесконечно малого размера энергии системы, метод, используемый нами, также работает как теория возмущений.

В процессе развитияизменений в системе, соотношения между параметрами Θ и $(H - H^*)$ могут существенно изменяться, но так как соотношения между ними при этом будут переходить от одного случая применимости к другому, то наш метод позволяет получить непрерывные приближённые решения искомой задачи.

Выводы. В настоящей работе мы рассмотрели алгоритм метода решения широкого круга нелинейных задач - метода эталонного моделирования, рассмотрели критерии его применимости. Данный метод применялся нами при решении различного типа уравнений математической физики: при решении задачи ораспространения нелинейных волн в дисперсной среде (3.1), задачи о конвективной диффузии в двухкомпонентной среде, задаче о низкоэнергетическом рассеянии электронов [18; 19; 20; 21]. Также предполагается применить данный метод к решению уравнения теплопроводности и уравнению Навье-Стокса. Данные примеры позволяют нам подтвердить достаточно широкие возможности метода. Этот вывод касается как типов решённых уравнений, так и характера нелинейности в рассмотренных задачах. Подтвердилось предположение о том, что одним из главных преимуществ метода эталонного моделирования является его гибкость и возможность применения для решения различных типов дифференциальных уравнений с частными производными. Это может быть особенно полезно в случаях, когда нет доступа к аналитическому решению уравнения или, когда необходимо быстро получить численное решение уравнения.

Результаты, полученные методом моделирования, подтвердили результативность предлагаемого метода эталонного моделирования для решения дифференциальных уравнений с частными производными. Метод способен давать точные решения, сравнимые с результатами, полученными с использованием классических методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 724 с.
2. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002. 368 с.
3. Зельдович Я. Б. Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1966. 688 с.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiax A. Handbook of First Order Partial Differential Equations. London: Taylor, Francis, 2002. 520 p.
6. Кунин С. Вычислительная физика. М.: Мир, 1992. 518 с.

7. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.

8. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит. 2002. 320 с.

9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 724 с.

10. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiax A. Handbook of First Order Partial Differential Equations. London: Taylor, Francis, 2002. 520 p.

11. Чебоксаров А. Б., Игропуло В. С. Эталонная модель нелинейной физической проблемы: создание, анализ особенностей // Физико-математические науки в Ставропольском государственном университете: Материалы научно-методической конференции «Университетская наука – региону». Ставрополь: Изд-во СГУ, 2005. С. 87–90.

12. Игропуло В. С., Чебоксаров А. Б. Уравнение Бюргерса как базовый эталон группы нелинейных моделей // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. Вып. 2. С. 321–327.

13. Чебоксаров А. Б., Игропуло В. С. Типы нелинейных уравнений математической физики и возможности их эталонного моделирования // Физико-математические науки на современном этапе развития СГУ: Материалы научно-методической конференции «Университетская наука – региону». Ставрополь: Изд-во СГУ, 2006. С. 48–50.

14. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи математических наук. М., 1952. Т. 7. С. 3–96.

15. Жирнов Н. И. Нормировка и критерий точности квазиклассических решений радиальных уравнений Дирака // Известия вузов СССР. Физика. 1964. Вып. 5. С. 125-130.

16. Жирнов Н.И., Игропуло В.С. О поправках к квазиклассическим фазам рассеяния // Известия вузов СССР. Физика. 1971. Вып. 7. С.149–151.

17. Белокос Е.Д. Общая формула для решений уравнения Sin-Gordon с начальными и граничными условиями // Теоретическая и математическая физика. М., 1995. Т. 103, № 3. С. 358–367.

18. Чебоксаров А. Б., Игропуло В. С. Метод моделирования для решения нелинейного уравнения с дисперсией // Материалы Всероссийской научной конференции «Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем». Ставрополь, 2007.

19. Чебоксаров А. Б., Чебоксаров В. А., Казаров Б. А. Исследование процессов массопереноса методом эталонного моделирования // Современная наука и инновации. 2018. № 1 (18). С. 53–58.

20. Чебоксаров А. Б., Чебоксаров В. А., Казаров Б. А. Некоторые способы использования метода разделения переменных для решения дифференциальных уравнений в частных производных // Современная наука и инновации. 2019. № 2 (26). С. 48–59.

21. Чебоксаров А. Б., Москвитин А. А. Низкоэнергетическое рассеяние электронов в силовом поле с центральной симметрией // Современная наука и инновации. 2021. № 3 (35). С. 60–72.

REFERENCES

1. Tikhonov A. N. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Fizmatlit, 2001. 724 p.

2. Martinson L. K., Malov YU. I. Differentsial'nye uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Izd-vo MGTU im. N. EH. Baumana. 2002. 368 p.

3. Zel'dovich YA. B. Raizer YU. P. Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii. M.: Fizmatlit, 1966. 688 p.

4. Uizem Dzh. Lineinye i nelineinye volny. M.: Mir, 1977. 622 p.

5. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiax A. Handbook of First Order Partial Differential Equations. London, Taylor, Francis, 2002. 520 p.

6. Kunin S. Vychislitel'naya fizika. M.: Mir, 1992. 518 p.

7. Kufner A., Fuchik S. Nelineinye differentsial'nye uravneniya. M.: Nauka, 1988. 304 p.
8. Samarskii A. A., Mikhailov A. P. Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. M.: Fizmatlit. 2002. 320 p.
9. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki. M.: Fizmatlit, 2001. 724 p.
10. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiax A. Handbook of First Order Partial Differential Equations. London, Taylor, Francis, 2002. 520 p.
11. Cheboksarov A. B., Igropulo V. S. Ehtalonnaya model' nelineinoi fizicheskoi problemy: sozdanie, analiz osobennostei // Fiziko-matematicheskie nauki v Stavropol'skom gosudarstvennom universitete: Materialy nauchno-metodicheskoi konferentsii «Universitetskaya nauka – regionU». Stavropol': Izd-vo SGU, 2005. P. 87–90.
12. Igropulo V.S., Cheboksarov A.B. Uravnenie Byurgersa kak bazovyi ehtalon gruppy nelineinykh modelei // Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. 2006. T. 13. Vol. 2. P. 321–327.
13. Cheboksarov A.B., Igropulo V.S. Tipy nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i vozmozhnosti ikh ehtalonnogo modelirovaniya // Fiziko-matematicheskie nauki na sovremennom ehtape razvitiya SGU: Materialy nauchno-metodicheskoi konferentsii «Universitetskaya nauka – regionU». Stavropol': Izd-vo SGU, 2006. P. 48–50.
14. Dorodnitsyn A.A. Asimptoticheskie zakony raspredeleniya sobstvennykh znachenii dlya nekotorykh osobykh vidov differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka // Uspekhi matematicheskikh nauk. M., 1952. T. 7. P. 3–96.
15. Zhirnov N.I. Normirovka i kriterii tochnosti kvaziklassicheskikh reshenii radial'nykh uravnenii Diraka // Izvestiya vuzov SSSR. Fizika. 1964. Vol. 5. P. 125–130.
16. Zhirnov N.I., Igropulo V.S. O popravkakh k kvaziklassicheskim fazam rasseyaniya // Izvestiya vuzov SSSR. Fizika. 1971. Vol. 7. P. 149–151.
17. Belokos E.D. Obshchaya formula dlya reshenii uravneniya Sin-Gordon s nachal'nymi i granichnymi usloviyami // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. M., 1995. T. 103, No. 3. P. 358–367.
18. Cheboksarov A.B., Igropulo V.S. Metod modelirovaniya dlya resheniya nelineinogo uravneniya s dispersiei // Materialy Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii «Fiziko-khimicheskie i prikladnye problemy magnitnykh dispersnykh nanosistem». Stavropol', 2007.
19. Cheboksarov A.B., Cheboksarov V.A., Kazarov B.A. Issledovanie protsessov massoperenosa metodom ehtalonnogo modelirovaniya // Modern Science and Innovations. 2018. No. 1 (18). P. 53–58.
20. Cheboksarov A.B., Cheboksarov V.A., Kazarov B.A. Nekotorye sposoby ispol'zovaniya metoda razdeleniya peremennykh dlya resheniya differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh // Modern Science and Innovations. 2019. No. 2 (26). P. 48–59.
21. Cheboksarov A.B., Moskvitin A.A. Nizkoehnergeticheskoe rasseyanie ehlektronov v silovom pole s tsentral'noi simmetriei // Modern Science and Innovations. 2021. No. 3 (35). P. 60–72.

ОБ АВТОРАХ / ABOUT THE AUTHORS

Чебоксаров Александр Борисович, Ставропольский государственный педагогический институт, Филиал в г. Ессентуки, Россия, кандидат физико – математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, , e-mail: cheboksarov1956@mail.ru.

Cheboksarov Alexander Borisovich, Stavropol State Pedagogical Institute, Branch in Essentuki, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics, Computer Science, e-mail: cheboksarov1956@mail.ru.

Ботвинёва Наталья Юрьевна, Ставропольский государственный педагогический институт, Филиал в г. Ессентуки, Россия, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики, e-mail: botvineva@yandex.ru.

Botvineva Natalia, Stavropol State Pedagogical Institute, Branch in Essentuki, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, e-mail: botvineva@yandex.ru.

Чебоксаров Виктор Александрович, Пятигорский институт (филиал) Северо-Кавказского Федерального университета, преподаватель информатики колледжа Пятигорского института (филиала), e-mail: Naweron@yandex.ru.

Cheboksarov Victor Aleksandrovich, Pyatigorsk Institute (branch) of North-Caucasus Federal University, teacher of computer science at NCFU College and Shame, e-mail: Naweron@yandex.ru.

Половинко Екатерина Владимировна, Пятигорский институт (филиал) Северо-Кавказского Федерального университета, доцент кафедры систем управления и информационных технологий.

Polovinko Ekaterina Vladimirovna, Pyatigorsk Institute (branch) of North-Caucasus Federal University, Associate Professor of the Department of Management Systems and Information Technologies.

Дата поступления в редакцию: 19.04.2023
После рецензирования:13.05.2023
Дата принятия к публикации:07.06.2023