

И. М. Першин [I. M. Pershin]
В.А.Носова [V.A. Nosova]
В.В. Цаплева [V.V.Tsapleva]

УДК 519.6, 519.71

DOI: 10.37493/2307-910X.2022.3.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОЛИТОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ В «КОЛОДЦАХ»

MATHEMATICAL MODELING OF HYDROLITHOSPHERE PROCESSES TAKING INTO ACCOUNT THE PROCESSES IN "WELLS"

*Северо-Кавказский Федеральный Университет,
Пятигорский институт (филиал) СКФУ, Пятигорск, Россия*
/ North-Caucasus Federal University, Pyatigorsk Institute (branch) of NCFU Pyatigorsk, Russia, E-mail:
ivmp@yandex.ru

Аннотация

В работе рассмотрена математическая модель гидролитосферного процесса с учетом «колодца» сформированного добывающей скважиной. Приводится описание математической модели взаимодействия гидролитосферных процессов в «колодце» с водоносными горизонтами. Результаты численного моделирования гидролитосферных процессов показывают существенное влияние радиуса «колодца» на понижение уровня в водоносном горизонте.

Ключевые слова: гидролитосферные процессы, описание гидролитосферных процессов в «колодцах», математические модели гидравлического взаимодействия.

Abstract.

The paper considers a mathematical model of the hydrolithospheric process, taking into account the "well" formed by a production well. A description of the mathematical model of the interaction of hydrolithospheric processes in the "well" with aquifers is given. The results of numerical modeling of hydrolithospheric processes show a significant influence of the "well" radius on the level decrease in the aquifer.

Keywords: hydrolithospheric processes, description of hydrolithospheric processes in "wells", mathematical models of hydraulic interaction.

Введение. Проблема рационального природопользования при эксплуатации гидролитосферных ресурсов, имеет важное значение для региона КМВ [1-3]. В направлении решения этой проблемы, на сегодняшний день, получены следующие результаты: разработаны математические модели гидролитосферных процессов в водоносных горизонтах [4,5];

Разработаны методы верификации математических моделей гидролитосферных процессов [6-8], а также методика формирования целевых функций [9] и методика синтеза алгоритмов управления рассматриваемыми процессами [10,11]. Разработка математических моделей рассматриваемых процессов, с учетом гидравлической взаимосвязи «процессов колодца» и водоносных горизонтов позволяет синтезировать более качественные системы управления и построить более точные модели прогнозирования развития гидролитосферных процессов на ближнюю и дальнюю перспективы.

Известно, что при эксплуатации добывающих скважин, мелкие фракции породы в эксплуатируемых (водоносных) горизонтах, окрестности добывающей скважины, постепенно вымываются. Это приводит к формированию «колодца» вокруг добывающей скважины (см. рис.1). Понижение уровня в таких колодцах, по всему объему, можно постоянным (в заданный момент времени).

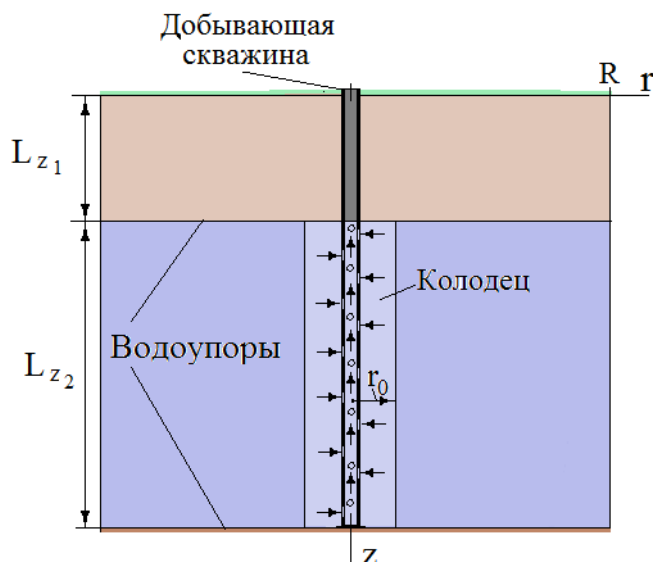


Рисунок 1. Схема гидролитосферного процесса

Схема гидролитосферного процесса, при совершенном водозаборе, показана на рис. 1. Опишем влияние параметров колодца на гидролитосферные процессы в водоносном горизонте.

Математическая модель гидролитосферного процесса. При описании математической модели полагаем, что состояние напора внутри «колодца» ($r < r_0$), в стационарном режиме, не зависит от r .

Известно, что водоотдача (μ) определяется из следующего соотношения:

$$\mu = V_c / V,$$

где: V_c – объем свободно-стекающей воды; V – объем породы.

Данные по водоотдаче приведены в соответствующих справочниках.

Для колодца, показанного на рис.1, рис.2 (в виде цилиндра, радиуса r_0) при заданном отборе воды (ΔQ м³/с), за время ($\Delta \tau$), понижение уровня в колодце (ΔH_k) показанном (см.рис.2), определяется из следующего соотношения:

$$V_c = V \cdot \mu = -Q \cdot \Delta \tau \rightarrow (\pi \cdot r_0^2 \cdot \Delta H_k) \cdot \mu = -Q \cdot \Delta \tau$$

Или

$$\Delta H_k = -Q \cdot \Delta \tau / (\pi \cdot r_0^2 \cdot \mu).$$

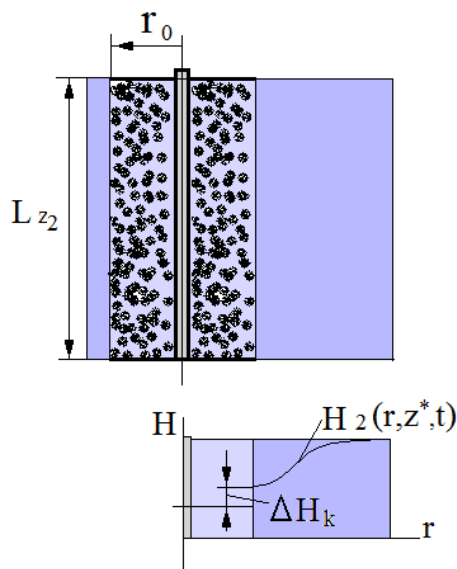


Рисунок 2. Колодец

Определим площадь боковой поверхности колодца:

$$S_k = 2\pi \cdot r_0 \cdot L_{z_2}.$$

Положим, что толщина боковой поверхности ($\Delta L_{z_2} \rightarrow dz$), тогда

$$ds_k = 2\pi \cdot r_0 \cdot dz$$

Используя уравнение Дарси, определим объем гидроминерального сырья, поступающего в колодец, за время $\Delta\tau$ (полагая что уровень в колодце равен H_{2k}):

$$\Delta V_k = 2\pi \cdot r_0 \cdot \int_0^{L_{z_2}} (k_{2r} \cdot (H_2(r_0, z, \tau) - H_{2k})) \cdot dz. \quad (1)$$

Повышение уровня в колодце, при притоке ΔV (за время $\Delta\tau$, составит):

$$\Delta H_k^* = (\Delta V_k / \mu) / (\pi \cdot r_0^2).$$

Изменение уровня в колодце может быть определено из следующего соотношения:

$$\Delta H_{2,k} = \Delta H_{2k} + \Delta H_k^*. \quad (2)$$

Общий приток гидроминерального сырья в колодец, за время $\Delta\tau$, составит:

$$V_p = Q \cdot \Delta\tau + \Delta V_k \cdot \Delta\tau.$$

Запишем приращение уровня в колодце за время $\Delta\tau$:

$$\Delta H_{2k} = (V_p / \mu) / (\pi \cdot r_0^2).$$

Математическая модель рассматриваемого процесса (см. рис. 1, рис. 2) в цилиндрических координатах:

Описание процесса в грунтовых водах

$$\frac{\partial h_1(r, z, \tau)}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 h_1(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{k_{1,z}}{r} \cdot \frac{\partial h_1(r, z, \tau)}{\partial r} + k_{1,z} \frac{\partial^2 h_1(r, z, \tau)}{\partial z_1^2}; \quad (3)$$

$$0 < r < R; 0 < z < L_{z_1}.$$

Описание процесса в водоносном горизонте.

«Колодец»

$$\Delta V_k = 2\pi \cdot r_0 \cdot \int_0^{L_{z_2}} (k_{2z} \cdot (H_2(r_0, z, \tau) - H_{2k})) \cdot dz, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_{2k}(\tau)}{\partial \tau} = 1/\mu \cdot (Q + \Delta V_k) / (\pi \cdot r_0^2),$$

$$0 < r < r_0; L_{z_1} < z < L_{z_2}.$$

Водоносный горизонт

$$\frac{\partial H_2(r, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_2} \left(k_2 \frac{\partial^2 H_2(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{k_{2,z}}{r} \cdot \frac{\partial H_2(r, z, \tau)}{\partial r} + k_{2,z} \frac{\partial^2 H_2(r, z, \tau)}{\partial z_1^2} \right), \quad (5)$$

$$r_0 < r < R; \quad L_{z_1} < z < L_{z_2},$$

Граничные условия задаются в виде

(условия Дарси)

Грунтовые воды - «Колодец»

$$\begin{aligned} h_1(r, L_{z_1}, \tau) &= h_1(r, L_{z_1}, \tau) + b_1 \cdot (H_{2k}(r, 0, \tau) - h_1(r, L_{z_1}, \tau)) \cdot \partial \tau, \\ H_{2k}(r, 0, \tau) &= H_{2k}(r, 0, \tau) - b_1 \cdot (H_{2k}(r, 0, \tau) - h_1(r, L_{z_1}, \tau)) \cdot \partial \tau, \end{aligned} \quad (6)$$

$$0 < r < r_0,$$

«Колодец» - боковая поверхность

$$\begin{aligned} H_{2,k}(r_0, z, \tau) &= H_{2k}(r_0, z, \tau) + k_{2z} \cdot (H_2(r_0, z, \tau) - H_{2k}(r_0, z, \tau)) \cdot \partial \tau, \\ H_2(r_0, z, \tau) &= H_2(r_0, z, \tau) - k_{2z} \cdot (H_2(r_0, z, \tau) - H_{2k}(r_0, z, \tau)) \cdot \partial \tau, \\ \partial H_{2k}(0, z, \tau) / \partial r &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 < z < L_{z_2}.$$

«Колодец» - нижняя граница

$$\partial H_{2k}(r, L_{z_2}, \tau) / \partial z = 0, \quad 0 < r < r_0 \quad (8)$$

Водоносные горизонты

$$\begin{aligned} h_1(r, L_{z_1}, \tau) &= h_1(r, L_{z_1}, \tau) + b_1 \cdot (H_2(r, 0, \tau) - h_1(r, L_{z_1}, \tau)) \cdot \partial \tau, \\ H_2(r, 0, \tau) &= H_2(r, 0, \tau) - b_1 \cdot (H_2(r, 0, \tau) - h_1(r, L_{z_1}, \tau)) \cdot \partial \tau, \end{aligned} \quad (9)$$

$$r_0 < r < R.$$

Нижняя граница водоносного горизонта

$$\partial H_2(r, L_{z_2}, \tau) / \partial z = 0, \quad r_0 < r < R, \quad (10)$$

Боковая грань.

$$h_1(R, z, \tau) = h_{1,0}; \quad 0 < z < L_{z_1}, \quad H_2(R, z, \tau) = H_{2,0}; \quad 0 < z < L_{z_2}. \quad (11)$$

Где: b_1 – параметр перетекания; h_1 – напор в горизонте грунтовых вод;

H_2 , H_{2k} – напор в изучаемом водоносном горизонте;

$k_1, k_{1,z}$, $k_2, k_{2,z}$ – коэффициенты фильтрации в соответствующих горизонтах, по координатам r, z ;

η_2 – упругость; μ – коэффициент водоотдачи; r, z – пространственные координаты; L_{z1} , L_{z2} , R – заданные значения; τ – время; $h_{1,0}$, $H_{2,0}$ – начальные состояния ($\tau=0$) водоносных горизонтов.

Математическая модель (3)–(11) аналитического решения не имеет. Для анализа рассматриваемых процессов, была составлена численная модель и программа численного моделирования рассматриваемых гидролитосферных процессов. При моделировании гидролитосферных процессов были использованы параметры, приведенные в табл.1 и табл.2

Табл.1. Геометрические параметры

R м.	L_{z1} м.	L_{z2} м.	N_1 (число шагов дискретизации по координате r)	N_2 (число шагов дискретизации по координате z)
100	30	60	100	32

Шаги дискретизации по пространственным координатам соответственно равны:

$$\Delta_{z1}=30/(16-1); \Delta_{z2}=60/(16-1); \Delta_r=100/(100-1).$$

Табл. 2. Физические параметры гидролитосферного процесса

k_1 м/сут.	$k_{1,z}$ м/сут.	k_2 м/сут.	k_{2z} м/сут.	η_2 1/м	b_1 1/сут.	μ
0.23	0.23	0.28	0.22	0.0005	0.0000	0.04
7						

Начальные условия были заданы в виде: $h_{1,0}=30$ м, $H_{2,0}=60$ м. Дебит скважины: $Q=100\text{м}^3/\text{сут.}$

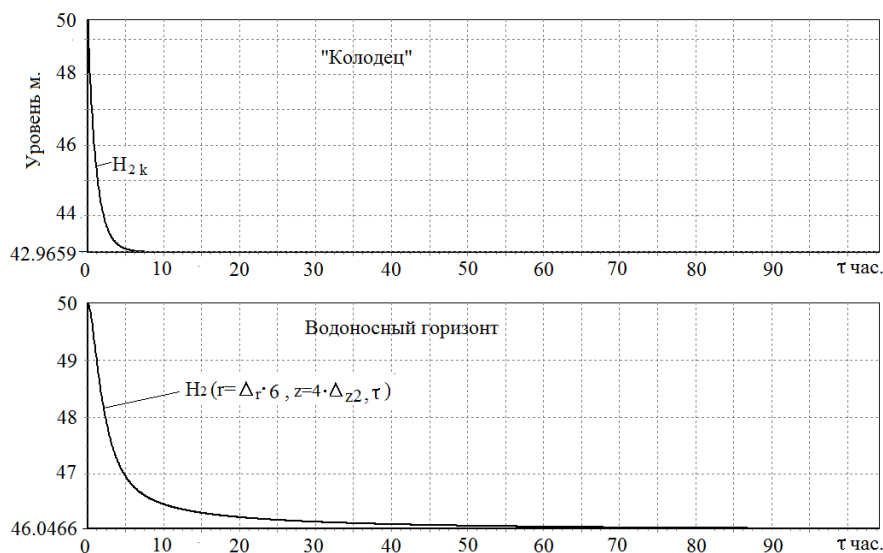


Рис. 3. Графики переходных процессов в колодце и заданной точке водоносного горизонта

Используя результаты моделирования, построены графики переходных процессов изменения уровня в «колодце» и в заданной точке водоносного горизонта (см. рис.3).

Используя результаты моделирования, построены графики (см. рис.4) изменения уровня в «колодце» и в заданной точке водоносного горизонта, в стационарном режиме (при заданном дебите), в зависимости от изменения радиуса колодца:

рис.4 а) - изменение уровня при $r_0=2\cdot\Delta r$, $Q=100\text{м}^3/\text{сут.}$;

рис.4 б) - изменения уровня при $r_0=6\cdot\Delta r$, $Q=100\text{м}^3/\text{сут.}$;

рис.4 в) - изменения уровня при $r_0=9\cdot\Delta r$, $Q=100\text{м}^3/\text{сут.}$,

$$\Delta_r=100/(100-1)=1.0101 \text{ м.}$$

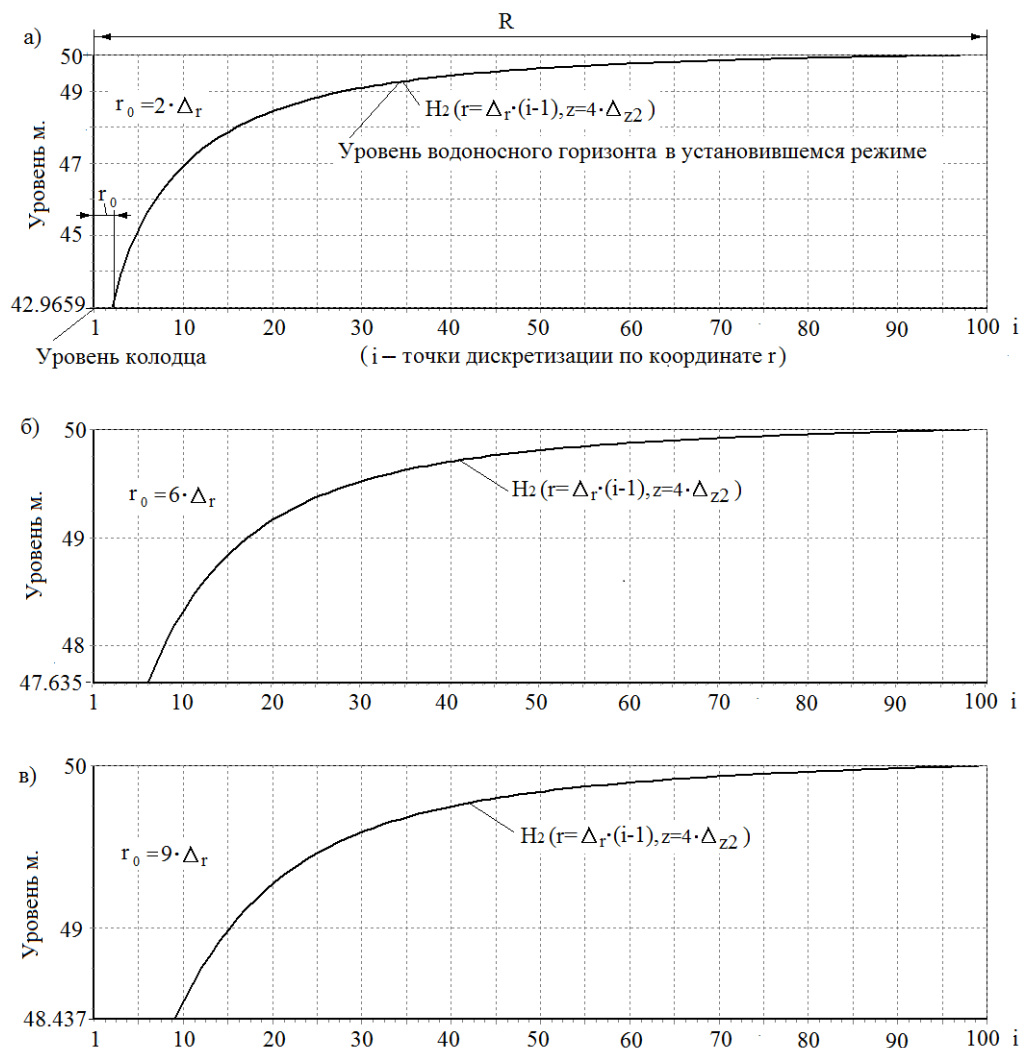


Рис.4. График изменения уровня в установившемся режиме

Заключение. В работе получена математическая модель, описывающая гидролитосферный процесс в «колодце», так же приводится описание математической модели взаимодействия гидролитосферных процессов в «колодце» с водоносным горизонтом и горизонтом грунтовых вод.

Приводятся результаты численного моделирования рассмотренных выше гидролитосферных процессов при заданном дебите добывающей скважины. Результаты моделирования гидролитосферных процессов показывают существенное влияние радиуса «колодца» на понижение уровня в водоносном горизонте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Першин И.М., Помеляйко И.С. Системный анализ экологического состояния зоны гипергенеза курорта Кисловодска. Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2013. № 3 (36). С. 74-80.
2. Евсеева М.М., Рудь Н.Ю., Першин И.М. Экологическая обстановка на курорте Кавказские Минеральные Воды, способы ее контроля и улучшения. Вопросы курортологии, физиотерапии и лечебной физической культуры. 2012. Т. 89. № 5. С. 68-71.
3. Малков А.В., Першин И.М., Помеляйко И.С. Проблемы экологической безопасности гидроминеральной базы курорта Кисловодск. В сборнике: Актуальные проблемы гидролитосферы (диагностика, прогноз, управление, оптимизация и

автоматизация). Сборник докладов. Редакционная коллегия: Бородавкин П.П., Малков А.В., Першин И.М., 2015. С. 92-116.

4. Pershin I.M. Design of distributed systems of hydrolithosphere processes management. A synthesis of distributed management systems. / Pershin I.M Pervukhin D.A., Ilyushin Y.V., Afanaseva O.V//В сборнике: Innovations and Prospects of Development of Mining Machinery and Electrical Engineering - Power Supply of Mining Companies. Сер. "Innovations and Prospects of Development of Mining Machinery and Electrical Engineering - Power Supply of Mining Companies" 2017. С. 032029. doi:10.1088/1755-1315/87/3/032029

5. Pershin I.M .Peculiarities of modelling hydro-lithospheric processes in the region of Kavkazskiye Mineralnye Vody (caucasus mineral springs)/Drovosekova T.I., Pershin I.M.// В сборнике: Proceedings of the 19th International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2016. 2016. С. 215-217.

6. Першин И.М. Верификация дискретных моделей гидrolитосферных процессов/ Першин И.М., Цаплева В.В., Носова В. А. // Современная наука и инновации. Научный журнал Вып. №4(36), 2021. С.31-39.

7. Першин И.М. Определение параметров распределенных звеньев, аппроксимирующих гидrolитосферные процессы/ Першин И.М., Носова В.А., Русак С.Н.// Современная наука и инновации. Научный журнал Вып. №2(34), 2021. 10-16.

8. Першин И.М. Веселов Г.Е., Першин М.И. Аппроксимационные модели передаточных функций распределенных объектов. Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 7 (168). С. 126-138.

9. Першин И.М., Кузьмин Н.Н., Малков А.В. Формирование целевых функций в задачах управления гидrolитосферными процессами. В сборнике: 5-я Российская мультikonференция по проблемам управления. Материалы конференции «Информационные технологии в управлении» (ИТУ-2012). 2012. С. 622-632.

10. Pershin I.M. Operational Control of Underground Water Exploitation Regimes/ Pershin I.M., Papush E.G., Malkov A.V., Kukharova T.V., Spivak A.O.// В сборнике: Proceedings of 2019 3rd International conference on Control in Technical Systems, CTS 2019. 2019. С. 77- 80. doi:10.1109/CTS48763.2019.8973323.

11. Першин И.М. Частотная концепция анализа и синтеза систем с распределенными параметрами. - Издательство ФГАОУ «Северо-Кавказский федеральный университет (филиал СКФУ в г. Пятигорске), 357500, Ставропольский край, г. Пятигорск, ул. Московская, 31, 08.02.2021 г. -171 с.

REFERENCES

1. Pershin I.M., Pomelyaiko I.S. Sistemnyi analiz ehkologicheskogo sostoyaniya zony gipergeneza kurorta Kislovodsk. Vestnik Severo-Kavkazskogo federal'nogo universiteta. 2013. № 3 (36). S. 74-80.

2. Evseeva M.M., Rud' N.YU., Pershin I.M. Ehkologicheskaya obstanovka na kurorte Kavkazskie Mineral'nye Vody, sposoby ee kontrolya i uluchsheniya. Voprosy kurortologii, fizioterapii i lechebnoi fizicheskoi kul'tury. 2012. T. 89. № 5. S. 68-71.

3. Malkov A.V., Pershin I.M., Pomelyaiko I.S. Problemy ehkologicheskoi bezopasnosti gidromineral'noi bazy kurorta Kislovodsk. V sbornike: Aktual'nye problemy gidrolitosfery (diagnostika, prognoz, upravlenie, optimizatsiya i avtomatizatsiya). Sbornik dokladov. Redaktsionnaya kollegiya: Borodavkin P.P., Malkov A.V., Pershin I.M., 2015. S. 92-116.

4. Pershin I.M. Design of distributed systems of hydrolithosphere processes management. A synthesis of distributed management systems. / Pershin I.M Pervukhin D.A., Ilyushin Y.V., Afanaseva O.V//V sbornike: Innovations and Prospects of Development of Mining Machinery and Electrical Engineering - Power Supply of Mining Companies. Ser. "Innovations and Prospects of Development of Mining Machinery and Electrical Engineering - Power Supply of Mining Companies" 2017. S. 032029. doi:10.1088/1755-1315/87/3/032029

5. Pershin I.M. Peculiarities of modelling hydro-lithospheric processes in the region of Kavkazskiye Mineralnye Vody (caucasus mineral springs)/Drovosekova T.I., Pershin I.M.// V sbornike: Proceedings of the 19th International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2016. 2016. S. 215-217.
6. Pershin I.M. Verifikatsiya diskretnykh modelei gidrolitosferykh protsessov/ Pershin I.M., Tsapleva V.V., Nosova V. A. // Sovremennaya nauka i innovatsii. Nauchnyi zhurnal Vyp. №4(36), 2021. C.31-39.
7. Pershin I.M. Opredelenie parametrov raspredelennykh zven'ev, approksimiruyushchikh gidrolitosfernye protsessy/ Pershin I.M., Nosova V.A., Rusak S.N.// Sovremennaya nauka i innovatsii. Nauchnyi zhurnal Vyp. №2(34), 2021. 10-16.
8. Pershin I.M. Veselov G.E., Pershin M.I. Approksimatsionnye modeli peredatochnykh funktsii raspredelennykh ob"ektov. Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki. 2015. № 7 (168). S. 126-138.
9. Pershin I.M., Kuz'min N.N., Malkov A.V. Formirovanie tselevykh funktsii v zadachakh upravleniya gidrolitosfernymi protsessami. V sbornike: 5-ya Rossiiskaya mul'tikonferentsiya po problemam upravleniya. Materialy konferentsii «Informatsionnye tekhnologii v upravlenii» (ITU-2012). 2012. S. 622-632.
10. Pershin I.M. Operational Control of Underground Water Exploitation Regimes/ Pershin I.M., Papush E.G., Malkov A.V., Kukharova T.V., Spivak A.O.// V sbornike: Proceedings of 2019 3rd International conference on Control in Technical Systems, CTS 2019. 2019. S. 77- 80. doi:10.1109/CTS48763.2019.8973323.
11. Pershin I.M. Chastotnaya kontseptsiya analiza i sinteza sistem s raspredelennymi parametrami. - Izdatel'stvo FGAOU «Severo-Kavkazskii federal'nyi universitet (filial SKFU v g. Pyatigorske), 357500, Stavropol'skii krai, g. Pyatigorsk, ul. Moskovskaya, 31, 08.02.2021 g. - 171 s.

ОБ АВТОРАХ / ABOUT THE AUTHORS

Першин Иван Митрофанович, Северо-Кавказский федеральный университет (филиал в г. Пятигорске), доктор технических наук, профессор, профессор кафедры систем управления и информационных технологий, профессор каф. АПУ Санкт-Петербургского электротехнического университета (ЛЭТИ) им. В.И.Ульянова (Ленина), e-mail: ivmp@yandex.ru.

Pershin Ivan Mitrofanovich, North Caucasus Federal University (branch in Pyatigorsk), Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Management Systems and Information Technologies, Professor Kaf. APU of the St. Petersburg Electrotechnical University (LETI) named after V.I. Ulyanova (Lenin). e-mail: ivmp@yandex.ru.

Носова Виктория Андреевна, магистрант, Санкт-Петербургский горный университет, vika27.09@mail.ru

Nosova Victoria Andreevna, Master's student, St. Petersburg Mining University, vika27.09@mail.ru.

Цаплева Валентина Викторовна, Северо-Кавказский федеральный университет (филиал в г. Пятигорске), кандидат технических наук, зав. кафедрой систем управления и информационных технологий, тел.: +7-961-488-80-39, e-mail: val-ryazanova@yandex.ru.

Tsapleva Valentina Viktorovna, North-Caucasus Federal University (Branch in Pyatigorsk), PhD in techniques, associate Professor Department of control systems and information technology, phone: +7-961-488-80-39, e-mail: val-ryazanova@yandex.ru.

Дата поступления в редакцию: 12.07.2022

После рецензирования: 23.08.2022

Дата принятия к публикации: 13.09.2022